Entorn del desenvolupament històric de les equacions algebraiques

Mª Rosa Massa - M. Dolors Magret
Departament de Matemàtica Aplicada I
Universitat Politècnica de Catalunya

Introducció

El conjunt dels nombres enters i el de polinomis amb coeficients en un cos són els exemples més bàsics d'anells commutatius, que constitueixen l'essència de l'àlgebra commutativa, branca de les matemàtiques estretament lligada a la geometria algebraica. És a finals del segle XIX que, amb el desenvolupament de l'àlgebra abstracta, els anells de polinomis es van començar a estudiar des d'un nou enfocament.[1]

L'estudi dels polinomis i de les equacions associades a ells, ha evolucionat molt al llarg del temps, i el seu recorregut històric és molt suggerent i instructiu. Aquí analitzem dos aspectes claus d'aquest desenvolupament. En l'apartat 1, ens ocupem de l'evolució històrica del problema de determinar les solucions de les equacions polinòmiques per radicals a partir dels seus coeficients; en l'apartat 2, tractem de l'evolució històrica de les demostracions del que avui anomenem Teorema fonamental de l'àlgebra.

1. Resolució de les equacions algebraiques

Un algorisme de resolució d'equacions algebraiques de segon grau ja es pot deduir a partir de problemes resolts a les tauletes babilòniques. La matemàtica "babilònica" (1500 aC) va ser transmesa per escribes i bàsicament utilitzada per càlculs relatius a problemes de la vida real. D'entre les tauletes d'argila en escriptura cuneïforme realitzades pels babilònics n'hi ha moltes de numèriques (taules de multiplicació, taules de recíprocs,...). Les tècniques que feien servir per a la construcció d'aquestes taules numèriques constituïen el nexe entre els càlculs i la realitat administrativa i d'enginyeria. Els babilònics van ser els primers a formular un algorisme consistent en una sèrie d'instruccions (sense cap explicació) per a trobar solucions concretes a problemes que es poden descriure mitjançant una equació de segon grau.[2]

La matemàtica grega, basada en la geometria, va fer també la seva aportació a la resolució d'equacions algebraiques. En els *Elements* d'Euclides (300 aC) es recullen els coneixements matemàtics de diferents escoles gregues i es demostren algunes proposicions geomètriques que es poden interpretar en termes d'equacions de segon grau.[3]

De Diofant d'Alexandria (~ 250 - ~ 350) es conseven dues obres: les *Aritmètiques* i *Els nombres poligonals*. La primera consta de tretze llibres, dels quals se n'han conservat només sis, i és un recull de problemes que, està dedicada a la resolució de problemes que, a l'hora de resoldre's, donen lloc a equacions de primer i segon grau, sempre concretes. Es fa palesa en ell una gran habilitat manipulant artificis aritmètics, sense que en cap moment s'intenti abordar el problema de trobar totes les solucions en el cas general. Les solucions negatives són considerades com absurdes; les irracionals o complexes, com a impossibles.

Cal destacar el paper fonamental que els àrabs han jugat en el desenvolupament de les equacions algebraiques. Mohamed Ben-Musa al-Khwarizmi (850 dC), matemàtic, astrònom i membre de la Casa de Saviesa de Bagdad és considerat com el creador de les regles de l'àlgebra. Va escriure *Hisab al-jabar wal-muqqabala* (813-830), traduïda al llatí per Roberto de Chester amb el títol *Liber algebrae et almucabala* (Segòvia, 1145), d'on prové el nom actual d'àlgebra. L'obra d'Al-Khwarizmi classificava les equacions fins a segon grau en sis tipus diferents, i explicava les regles a seguir per a resoldre-les.[4] Totes les àlgebres àrabs, basades en l'obra d'Al-Khwarizmi, constaven d'una part teòrica on apareix, per exemple, la multiplicació de polinomis, i d'una part pràctica on es resolien problemes relacionats amb el comerç i altres aspectes de la vida quotidiana, utilitzant la classificació anterior de resolució de les equacions. Qui va difondre en el món occidental tots aquests coneixements va ser Leonardo da Pisa, fill de Bonacci (1180-1250), que s'ha conegut amb el nom de Fibonacci. A la seva obra *Liber abaci* (1202) s'hi troben molts dels problemes considerats en els textos de les àlgebres àrabs així com els mètodes de càlcul de la numeració hindú.[5]

L'època menys coneguda del desenvolupament de les equacions algebraiques correspon als segles XIII i XIV, on floriren les matemàtiques comercials amb les Aritmètiques mercantils, obres que encara s'estan descobrint i analitzant.[6] En aquests llibres les regles àrabs de resolució algebraica apareixen moltes vegades com un apèndix. El saber d'aquestes aritmètiques mercantils i de les àlgebres àrabs es recull en una obra de Luca Pacioli (1447-1517) titulada *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni* & *Proportionalità* (1494) que va tenir gran difusió a la seva època.

Més tard, Girolamo Cardano (1501-1576) i Rafael Bombelli (1526-1573), entre d'altres algebristes del Cinquecento, van contribuir amb les seves obres: *Ars Magna* (1545) i *Algebra* (1572), respectivament, a la resolució de les equacions de tercer grau i biquadrades, justificant de manera geomètrica els resultats obtinguts per via purament àbac-algebraica.[7] Cardano resol 20 tipus d'equacions de quart grau, però els atribueix a Ludovico Ferrari (1522-1565). És interessant subratllar que Cardano en la seva obra estudia les equacions algebraiques de manera sistemàtica i com una branca diferenciada dins les matemàtiques.[8]

Aquests matemàtics, en resoldre equacions, es troben amb l'aparició d'arrels quadrades de nombres negatius, ja que aquestes apareixen en la fórmula de la solució general de les equacions de tercer grau. Potser aquí és on sorgeix la necessitat d'operar amb els que avui anomenem *nombres complexos*.[9] Fins aquest moment, fins i tot les solucions negatives de les equacions només eren acceptades quan se'ls podia donar una interpretació. En canvi, Cardano accepta sempre solucions negatives per a les equacions, tot i que les qualifica com a falses (o fictícies). D'altra banda, Bombelli a l'*Algebra* introdueix els nombres complexos, amb una terminologia específica: anomena pdm ("più di meno") a $\sqrt{-1}$ i mdm ("meno di meno") a $-\sqrt{-1}$, i dóna les regles fonamentals per operar amb ells.[10]

En aquest recorregut històric l'obra *In artem analyticem isagoge* (1591), de François Viète (1540-1603), és un text clau per la utilització de símbols, no només per representar les incògnites, sinó també per representar les quantitats conegudes.[11] També es va distingir per treballar amb equacions en forma general tot creant un enllaç amb la geometria a través de la teoria de proporcions d'Euclides. Viète igualava les equacions algebraiques amb les proporcions mitjançant el producte de mitjos i extrems d'una proporció, introduint així una nova manera de treballar amb les equacions. Va donar un nou mètode per resoldre l'equació de tercer grau i per algun tipus d'equacions de quart grau. El treball de Viète va fer palesa la utilitat dels procediments algebraics per a resoldre equacions a l'aritmètica, la geometria i la trigonometria.

Entre els seguidors de Viète podem citar Pierre de Fermat (1601-1665) considerat el creador de la geometria analítica juntament amb René Descartes (1596-1650). Aquest darrer, amb la seva obra *La Géométrie* (1637), va contribuir a la resolució d'equacions de tercer i quart grau, i d'algunes concretes de cinquè i sisè grau, en estudiar la naturalesa de les corbes. Cal remarcar que en l'obra de Descartes s'introdueix la notació actual, llevat de dues variants menors: el signe d'igualtat i el quadrat. La introducció del llenguatge algebraic en la geometria va permetre la resolució de nous problemes geomètrics i/o d'altres encara no resolts.

Posteriorment, a partir del segle XVII, es va produir el que actualment s'anomena "algebrització de les matemàtiques", que va donar origen a dues noves branques de la matemàtica que avui coneixem amb els noms de càlcul infinitesimal i geometria analítica. Aquest procés d'algebrització va ser lent i desigual, i va comportar un canvi de pensament en el camp de les matemàtiques: d'una manera de pensar quasi exclusivament geomètrica es va passar a una més algebraica.[12] Després de les aportacions de Descartes, amb la introducció de procediments algebraics dins la geometria, la resolució de les equacions s'abordava amb argumentacions geomètriques però també i, sobretot, amb demostracions algebraiques.

Al llarg del segle XVIII, els esforços varen anar dirigits a resoldre l'equació de cinquè grau (recordeu que les equacions de tercer i quart grau ja havien estat resoltes i publicades per Cardano).[13] Un dels grans estudiosos d'aquest tema va ser Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) el qual va publicar una llarga memòria, *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* (1771), on explica un mètode per a resoldre equacions de tercer i quart grau i mostra que, amb aquest mètode, en les equacions de grau més gran que quatre no és possible expressar les solucions en termes dels seus coeficients mitjançant radicals.[14]

La idea de Lagrange és que per resoldre les equacions d'un determinat grau s'han de construir noves equacions que tinguin arrels expressables en funció de les solucions que busquem. Així va demostrar que les equacions cúbiques es resolen amb una equació de grau 3!, o sigui de grau 6, i les equacions quàrtiques es resolen amb una equació de grau 4!, o sigui de grau 24. També va demostrar que aquestes noves equacions de grau 6 i grau 24 poden ser reduïdes a equacions de grau més petit que 3 i més petit que 4, respectivament. Lagrange fa aquestes demostracions en les dues primeres seccions. En la secció tercera és on intenta aplicar aquest mètode en les equacions de grau 5. Primer troba l'equació auxiliar que s'utilitza per resoldre la de grau 5 que és de grau 5!, o sigui 120 i només la pot reduir a una de grau 6. En l'última secció que té per títol *Conclusion des réflexions précédentes, avec quelques remarques générales sur la transformation des équations et sur leur réduction ou abaissement a un moindre degré* explica:

> *Hom ha degut veure per l'anàlisi que acabem de donar els principals mètodes coneguts per a la resolució d'equacions, que aquests mètodes es redueixen tots a un mateix principi general, saber trobar funcions de les arrels de l'equació proposada, les quals siguin tals: (1) que l'equació o les equacions per a les quals elles seran donades, és a dir, on elles seran les arrels (equacions que es coneixen amb el nom de reduïdes), siguin d'un grau més petit que el de la proposada, o siguin almenys descomponibles en altres equacions d'un grau més petit que el d'ella; (2) que se'n puguin deduir fàcilment el valor de les arrels buscades.*[15]

Lagrange després d'especificar quines condicions han de verificar les funcions de les arrels buscades conclou que amb aquest mètode no pot resoldre les equacions de grau més gran que quatre.

En el segle següent, Niels Henrick Abel (1802-1829) i Paolo Ruffini (1765-1822) van demostrar la impossibiltat de resoldre per radicals una equació general de grau $n > 4$.

Évariste Galois (1811-1832) va ser qui, en la memòria *Sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux* (1831), va resoldre completament el problema de quines equacions són resolubles mitjançant operacions algebraiques, basant-se en els treballs anteriors de Lagrange i d'Abel, entre d'altres. Era conegut en aquell moment que alguns tipus especials d'equacions (binomials i abelianes, per exemple) sí que eren resolubles per radicals. Galois no només va demostrar quines equacions (de grau qualsevol) són resolubles per radicals, sinó que en fer-ho va crear el que avui en dia anomenem "la teoria de Galois".

El treball de Galois no va ser conegut fins l'any 1846, quan Joseph Liouville (1809-1882) en va publicar una part. La teoria de Galois sobre les equacions es va reunir en el *Traité des substitutions et des équations algébriques* (1870), llibre que va preparar Camille Jordan (1838-1922).[16]

2. El Teorema fonamental de l'àlgebra

El Teorema fonamental de l'àlgebra representa un altre dels fils conductors del desenvolupament de la teoria de les equacions algebraiques.[17] Un dels enunciats possibles per a aquest teorema afirma que "tot polinomi, amb coeficients reals, de grau n descompon en producte de factors irreductibles de grau 1 o 2 amb coeficients reals". Un altre dels enunciats possibles és que "tot polinomi de grau n admet n arrels (simples i/o múltiples, reals i/o imaginàries)".

En el procés històric de la seva aparició es poden considerar tres fases: la primera, on es formulen, sense demostració, diverses versions de l'enunciat d'aquest teorema; la segona, on s'intenta demostrar el teorema tant de manera geomètrica com analítica i la tercera, on queda demostrat el teorema dins d'una nova part de la matemàtica: l'àlgebra abstracta.

El primer intent de formulació del Teorema fonamental, sembla ser que és degut a Peter Roth (ca. 1580-1617) el qual el va enunciar a l'obra *Arithmetica philosophica* (1600).[18] Posteriorment, l'enunciat sense demostració, el podem trobar a l'obra *Invention nouvelle en l'algèbre* (1629) d'Albert Girard (1593-1692):

> *Totes les equacions algebraiques tenen tantes solucions com mostra el terme de grau més gran, exceptuant les incompletes.*[19]

Malauradament Girard hi afegeix "tret de les incompletes" la qual cosa fa que no es consideri l'enunciat complet del Teorema fonamental.[20] Més tard, en el 1637, Descartes en el llibre III de *La Géométrie* especifica que pot haver-hi el mateix nombre d'arrels que el grau de l'equació i explica que seran reals i/o imaginàries:

> *Sapigueu doncs que en cada equació, tant quant la incògnita té de dimensions, tant pot haver-hi d'arrels, és a dir, tants valors d'aquesta incògnita.*[21]
>
> *Per la resta com que ni les arrels vertaderes ni les falses són sempre reals, a vegades són imaginàries; és a dir, que sempre se'n poden imaginar tantes com acabo de dir en cada equació, però a vegades no hi ha cap quantitat que correspongui a les que hom imagina.*[22]

En el segle XVIII, diversos matemàtics com Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), Johann Bernoulli (1667-1748) i d'altres s'adonen de la conveniència de disposar d'una descomposició de les fraccions racionals en fraccions simples.

L'any 1702, Leibniz publicà una memòria sobre la integració de fraccions racionals en la què el mètode d'integració que s'utilitza es basa en la descomposició del denominador en producte de factors lineals, suposant, a priori, que una tal descomposició existeix (primer en el cas d'arrels simples i, més tard, fent referència al cas d'arrels múltiples).[23]

Malgrat el fet que Leibniz considera que una tal descomposició no sempre existeix, és precisament aquí on apareix per primer cop, d'una forma general i precisa, l'enunciat del Teorema fonamental de l'àlgebra: "Un polinomi a coeficients reals es pot descompondre com a producte de factors lineals o de grau dos amb coeficients reals".[24] Apreciem aquí un clar exemple de connexió, a començaments del segle XVIII, entre el càlcul infinitesimal i l'àlgebra.

Les primeres temptatives de demostració del Teorema fonamental de l'àlgebra van tenir lloc en el segle XVIII; la primera demostració analítico-geomètrica la va donar Jean d'Alembert (1717-1783) l'any 1748 en la memòria titulada *Recherches sur le calcul integral.*[25] El mateix any, Leonhard Euler (1707-1783) en l'obra *Introductio in Analysin Infinitorum*, en el capítol II titulat *De la transformació de les funcions*, va argumentar sobre les relacions entre el nombre d'arrels i el tipus de factors:

> *[...] Per altra banda, és clar que un factor doble comprèn dos valors simples, un factor triple, tres simples i així successivament. A més una funció entera Z de z en la qual*

l'exponent de la potència més gran de z sigui n contindrà n factors simples; per tot això, al mateix temps, si alguns factors fossin o bé dobles o bé triples, & c., coneixeríem el nombre de factors.[26]

29. Trobarem els factors simples de qualsevol funció entera de z si posem aquesta funció Z igual a zero i investiguem a partir d'aquesta equació totes les arrels de z: en efecte, tantes arrels com ofereixi z donaran tants factors simples de la funció Z.[27]

30. Els factors simples per tant seran reals o imaginaris; i si la funció Z tingués factors imaginaris, el seu nombre sempre seria parell.[28]

Més endavant, després d'explicar que el producte de dos factors simples imaginaris conjugats sempre dóna un factor real doble, enuncia explícitament el Teorema fonamental de l'àlgebra:

Tota funció entera de z es podrà resoldre en factors reals, simples o dobles.[29]

L'any 1751 Euler va presentar-ne una demostració a *Recherches sur les racines imaginaires des équations.*[30] Es va basar en tres lemes que va provar amb consideracions geomètriques: (1) una equació de grau senar té com a mínim una arrel, (2) una equació de grau parell o bé no té arrels reals o bé té un nombre parell d'arrels reals, i (3) una equació (mònica) de grau parell, amb terme independent negatiu, té com a mínim una arrel positiva i una arrel negativa.[31] Tot seguit, va demostrar que les equacions de quart grau sempre poden ser descompostes en dos factors reals de segon grau. En aquesta demostració Euler utilitza les tècniques de Descartes (llibre III de la *Géométrie*) per transformar l'equació de quart grau en una de sisè grau fàcilment resoluble. També va provar que les equacions de vuitè grau sempre poden ser descompostes en dos factors reals de quart grau. Finalment, va demostrar que les equacions de grau $2m$ (amb $m > 1$) sempre poden ser descompostes en dos factors reals de grau $2m - 1$ i conclou dient:

Heus aquí una demostració completa de la proposició que és usualment pressuposada en anàlisi, especialment en el càlcul integral, i que diu que cada funció racional d'una variable x com $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} +$ *etc. sempre pot ser resolta en factors reals, o bé simples de la forma* $x + p$*, o bé dobles de la forma* $xx + px + q$.[32]

Podem afirmar que fins aquest moment l'existència de les arrels d'un polinomi de grau n se suposava certa i, a partir de diferents transformacions, s'intentava esbrinar la seva naturalesa.[33]

La primera demostració rigorosa del Teorema fonamental de l'àlgebra és la presentada pel matemàtic Carl Friedrich Gauss (1777-1855), en la seva tesi doctoral (1799), on va demostrar, amb consideracions geomètriques, que tota equació polinòmica té com a mínim una arrel, ja siguin els seus coeficientes reals o complexos. Després, va fer encara tres demostracions més, la segona de les quals (1816) és purament algebraica, a diferència de la primera. Gauss prova que tot polinomi amb coeficients reals es pot descompondre en producte de factors lineals i quadràtics. La segona demostració de Gauss s'inicia provant alguns resultats sobre funcions enteres simètriques, com ara que els coeficients d'un polinomi que descompon completament són funcions simètriques de les seves arrels. La idea de la demostració és laboriosa, més que difícil, i es basa en la construcció d'equacions auxiliars.[34]

Posteriorment diferents matemàtics han ofert altres demostracions, algunes de les quals són, a diferència de les proposades per Gauss, de caire constructiu.

3. Consideracions finals

A partir de l'obra de Descartes, tal com hem dit, i durant un segle aproximadament, es va dur a terme el que podríem anomenar procés d'algebrització de les matemàtiques.

Aquest procés d'introducció de l'àlgebra com a part de les matemàtiques no va ser uniforme: mentre que uns pocs (els menys) l'acceptaven completament, d'altres la utilitzaven com una eina i d'altres la rebutjaven.

Segons Lagrange (1795):

> *Tant en quant l'àlgebra i la geometria han estat separades, el seu progrés ha estat lent i els seus usos limitats, però des de que aquestes ciències s'han reunit, s'han prestat forces mútues i han marxat juntes amb pas ràpid cap a la perfecció. És a Descartes que hom deu l'aplicació de l'àlgebra a la geometria, aplicació que ha esdevingut la clau dels més grans descobriments en totes les branques de les matemàtiques.*[35]

L'establiment del llenguatge algebraic com un llenguatge nou de símbols i tècniques per a resoldre problemes nous mereix una consideració apart. De fet, ja a l'obra de Viète es va fer palès l'avantatge de la utilització de símbols per a representar les quantitats conegudes i les incògnites. Tot i amb això, aquest nou llenguatge no va ser acceptat de forma unitària. Cal remarcar, doncs, la importància de l'aparició del llenguatge simbòlic i la rellevància d'aquest fet en el progrés posterior de les matemàtiques.

La introducció de l'àlgebra dins la geometria va obligar a un replantejament dels límits disciplinaris de les ciències matemàtiques a nivell terminològic i, sobretot, a nivell metodològic, que es va traduir en un establiment de noves línies divisòries entre les diferents branques de la matemàtica.

Francis Bacon (1561-1626) va presentar una classificació de les ciències diferent de la divisió clàssica en set arts liberals agrupades en el trivium i el quadrivium. Dividia la matemàtica en pura i mixta, i la pura en aritmètica i geometria[36] (observeu que l'àlgebra no apareix com una branca separada). Aquesta classificació va ser recollida pels enciclopedistes francesos en el segle posterior. Així, en la classificació de les matemàtiques presentada per d'Alembert (1754) l' àlgebra apareixia com una part de l'aritmètica i aquesta formava, junt amb la geometria, la matemàtica pura. A més, hi considerava les matemàtiques mixtes (dividides en mecànica, astronomia geomètrica, òptica, acústica, pneumàtica i art de conjecturar) i les físicomatemàtiques.

L'any 1862, Marie-Nicolas Bouillet (1798-1864) autor d'un *Diccionari universal de la Ciència, les Lletres i les Arts*, presenta una divisió de les ciències en què ja es considera l'àlgebra una de les tres branques dins de les matemàtiques pures, essent l'aritmètica i la geometria les altres dues.

De fet, durant el segle XIX, l'àlgebra va sofrir una profunda transformació arran del treball de Galois, en el què és clau la teoria de grups, tot i que aquest és un concepte que ell no defineix en cap moment. Lagrange ja fa palès que el problema de la resolució d'equacions per radicals requereix el coneixement dels subgrups del grup de permutacions de les seves arrels.

Els conceptes de cos i d'extensió de cossos també es troben ja en el treball de Galois i d'Abel, tot i que va ser Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916) qui va introduir aquesta terminologia. Els conceptes d'anell i d'ideal són presents en els treballs de Dedekind i Leopold Kronecker (1823-1891), tot i que el nom d'anell va ser introduït posteriorment per David Hilbert (1862-1943).

La teoria d'anells i ideals va ser axiomatitzada i sistematitzada per Emmy Noether (1882-1935) qui, a més de les seves contribucions a la física teòrica, va establir les bases del que avui coneixem com a "àlgebra moderna". En particular, va introduir els conceptes d'anell, ideal, mòdul, i va obtenir diversos resultats rellevants, bàsics en la disciplina de l'àlgebra commutativa. En la darrera etapa de la seva vida, es va endinsar també en l'àlgebra no commutativa. Malgrat la significació dels seus resultats, la seva més gran aportació és potser l'enfocament axiomàtic, on els conceptes es prioritzen sobre els càlculs.

Així, el mètode axiomàtic en l'àlgebra, va ser establert aproximadament 2000 anys després que Euclides introduís aquest mètode en la geometria (en els seus *Elements*). La introducció de nous elements i la ulterior abstracció ha permès l'aplicació de l'àlgebra no només en altres àrees de les matemàtiques sinó també en altres disciplines. La teoria de grups és una de les branques més importants en la matemàtica moderna amb la qual han estat vinculats els avenços en anàlisi, geometria, física teòrica, mecànica, etc. Per exemple, la primera aplicació en la física va ser la classificació de cristalls (1890) i, avui dia, juga un paper clau en la física quàntica, de manera que Wolfgang Ernst Pauli (1900-1958), un dels seus creadors, va afirmar que "la teoria de grups és una de les eines més poderoses en la física moderna".

Notes

[1] Per una visió de perspectiva podeu consultar Van der Waerden (1980) i Bashmakova-Smirnova (2000).

[2] Sobre la matemàtica babilònica vegeu Hoyrup (2002) i Caveing (1994).

[3] Vegeu la Proposició 6 del llibre II dels *Elements*. Euclides (1956), p. 385.

[4] Vegeu la classificació i les regles a Al-Khwarizmi (1986), pp. 8-9. Per una perspectiva més general sobre l'àlgebra en la éciència àrab vegeu Català (1981).

[5] Més informació a Sigler (2002), pp. 554-615.

[6] Al Centro Studi della Mathematica Medioevale de la Universitat de Siena s'està portant a terme l'edició dels tractats algebraics d'aquest període amb l'ànim de fer possible una història més completa de l'àlgebra. Vegeu Franci, R.-Toti Rigatelli, L. (1985).

[7] Sembla que va ser Niccolò Tartaglia (ca. 1500-1557) qui va resoldre per primer cop l'equació de tercer grau i li va comunicar a Cardano el qual la va publicar sense el seu permís.

[8] Cardano analitza tots els casos d'equació cúbica completa, transformant cada equació en una de nova sense el terme quadrat, dóna un exemple numèric per a cada cas i prova geomètricament la validesa de la solució. Vegeu la resolució de l'equació de grau 3 a Cardano (1968), pp. 96-101.

[9] Els nombres complexos representen una eina bàsica i apareixen, no només en la pròpia matemàtica, sinó també en en la física. Més concretament, un moviment oscil·latori sinusoïdal (com és ara el de balanceig d'un pèndol) s'analitza utilitzant els nombres complexos; també en enginyeria elèctrica, en estudiar el corrent altern, per exemple, on en l'estudi de les funcions oscil·latòries en la mecànica quàntica. Així, els nombres complexos resulten ser l'eina ideal per a estudiar fenòmens reals.

[10] Sobre Bombelli, podeu consultar Bombelli (1929). La representació geomètrica dels nombres complexos, i la interpretació geomètrica de les operacions entre ells, va ser clau per a la seva acceptació. Entre els matemàtics que podem destacar en aquesta línia estan John Wallis (1616-1703), Caspar Wessel (1795-1818) i Jean Robert Argand (1768-1822). Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) va observar que, en fer qualsevol operació amb nombres complexos, incloses potències i arrels, el resultat és altre cop un nombre complex. Leonhard Euler (1707-1783) va ser qui va introduir la notació "i" per a designar $\sqrt{-1}$, i va establir una relació entre els nombres complexos i les funcions transcendentals, a partir de les fórmules obtingudes per Roger Cotes (1682-1716). Paral·lelament, Abraham de Moivre (1667-1754) va obtenir les arrels n-èsimes d'un nombre complex qualsevol i la fórmula que porta el seu nom. Carl Friedrich Gauss (1777-1855) va sistematitzar el seu ús i va introduir la nomenclatura de "nombre complex". El seu tractament els va fer adquirir una autonomia pròpia.

[11] Sobre aquesta obra de Viète, peça clau dins la història de l'àlgebra, vegeu la traducció anglesa de Witmer (1983).

[12] Alguns autors van adoptar les tècniques algebraiques en la seva obra i, a la vegada, varen intentar justificar-les i transformar-les d'acord amb la matemàtica clàssica. Altres, malgrat conèixer l'existència d'aquests procediments, els van considerar aliens al pensament matemàtic i fins i tot els refusaven i, per últim, uns pocs, acceptaven aquesta nova manera de pensar com un complement més pel desenvolupament de les seves tècniques matemàtiques. Vegeu Massa (2001), p. 708 i Mahoney, M. S. (1980), pp. 141-155 .

[13] Més informació a Toti Rigatelli (1994).

[14] Alexandre-Théofile Vandermonde (1736-1796) a *Memoir on the solution of equations* va arribar a conclusions anàlogues, si bé el seu treball no va ser considerat fins el segle XX. Vegeu Bashmakova-Smirnova (2000), pp. 103-106.

[15] *"86. On a dû voir par l'analyse que nous venons de donner des principales méthodes connues*

pour la résolution des équations, que ces méthodes se réduisent toutes un même principe général, savoir à trouver des fonctions des racines de l'équation proposée, lesquelles soient telles: 1º que l'équation ou les équations par lesquelles elles seront données, c'est-à-dire dont elles seront les racines (équations qu'on nomme communément les réduites), se trouvent d'un degré moindre que celui de la proposée, ou soient au moins décomposables en d'autres équations d'un degré moindre que celui-là; 2º que l'on puisse en déduire aisément les valeurs des racines cherchées." Vegeu Lagrange (1867-1892), p. 355.

[16] Vegeu Van der Waerden (1980), pp. 112-117 i Bashmakova-Smirnova (2000), pp. 115-127.

[17] Per explicar l'evolució i les demostracions del Teorema Fonamental de l'àlgebra emprarem l'article de Josep Pla i Carrera (1992) i de Christian Gilain (1991). Cal remarcar que Gilain distingeix entre el teorema fonamental de l'àlgebra (TFA) i el teorema de factorització lineal (TFL). Segons Gilain, el TFL apareix com a lema dins de les demostracions algebraiques del TFA, però pot no tenir-se en compte en les demostracions analítiques. Gilain (1991), p. 93.

[18] Vegeu Pla (1992), p. 883.

[19] *"Toutes les équations d'algèbre reçoivent autant de solutions, que la dénomination de la plus haute quantité le démontre, excepté les incomplètes."* Vegeu Gilain (1991), p. 93.

[20] A més, tampoc no apareix de forma explícita de quin tipus han de ser aquestes solucions: no deixa clar si són complexes, sinó que, utilitzant el llenguatge algebraic actual, aquestes podrien estar en una extensió algebraica del cos dels nombres complexos.

[21] *"Scachés donc qu'en chaque Équation, autant que la quantité inconnue a de dimensions, autant peut il y avoir de diverses racines, c'est à dire de valeurs de cette quantité"*. Descartes (1637), p. 372.

[22] *"Au reste tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement imaginaires; c'est-à-dire, qu'on peut bien toujours en imaginer autant que j'ai dit en chaque équation, mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité qui corresponde à celles qu'on imagine"*. Descartes (1637), p. 380.

[23] També apareix publicada, l'any 1704, una memòria de Johann Bernoulli que tracta el mateix problema de càlcul integral, on el mètode proposat és també la descomposició de les fraccions racionals en suma de fraccions simples. Trobareu més informació a Gilain (1991), pp. 97-101 i a Pla (2002), pp. 887-893.

[24] De fet, atès que Leibniz considera que aquesta descomposició no és certa per a tots els polinomis, no es pot considerar estrictament com l'enunciat del Teorema fonamental de l'àlgebra.

[25] Gilain en el seu article presenta en un annex una transcripció del primer text de d'Alembert del 1745 sobre el Teorema fonamental de l'àlgebra. Vegeu Gilain (1991), pp. 133-136.

[26] *"Perspicuum autem est Factorem duplicem duos complecti valores simplices, Factorem triplicem tres simplices, & ita porro. Hinc Functio ipsius z integra, in qua exponens summae potestatis ipsius z est = n, continebit n Factores simplices; éx quo simul, si qui Factores fuerint*

vel duplices vel triplices, & c. Numerus Factorum cognoscetur." A Euler (1748), ed. 2000, p. 17.

[27] *"29. Factores simplices Functionis cuiuscunque integra Z ipsius z reperiuntur, si Functio Z nihilo aqualis ponatur, atque ex hac aequatione omnes ipsius z radices investigentur: singula enim ipsius z radices dabunt totidem Factores simplices Functionis Z."* (Ibid, p. 17).

[28] *"30. Factores simplices ergo erunt vel reales, vel imaginarii; & , si Functio Z habeas Factores imaginarios eorum numerus semper erit par."* (Ibid, p. 18).

[29] *"Hinc omnis Functio integra ipsius z resolvi poterit in Factores reales vel simplices vel duplices."* (Ibid, p. 19).

[30] Lagrange va completar la demostració d'Euler.

[31] Vegeu Struik (1969), pp. 99-102.

[32] A Struik (1969), p. 102, llegim: *"Scholium. We thus have here a complete demonstration of the proposition, which is usually presupposed in analysis, especially in the integral calculus, and which claims that every rational function of a variable x as $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2}+$ etc. can always be resolved into real factors, either simple ones of the form x + p, or double ones of the form $xx + px + q$."*

[33] En aquest sentit es podria afirmar que les demostracions del Teorema Fonamental fins aquí esmentades són demostracions "parcials".

[34] Vegeu les demostracions donades per Gauss a Van der Waerden (1980), pp. 95-102.

[35] *Tant que l'Algèbre et la Géometrie on été séparées, leur progrès ont été lents et leurs usages bornés mais lorsque ces deux sciences se sont réunies, elles se sont prété des forces mutuelles et on marché ensemble d'un pas rapide vers la perfection. C'est à Descartes qu'on doit l'application de l'Algèbre a la Géometrie, application qui est devenue la clef des plus grandes découvertes dans toutes les branches des Mathématiques.* A *Oeuvres* (1795), vol. VII, p. 271.

[36] La matemàtica mixta la dividia en perspectiva, música, astronomia, cosmografia, arquitectura, enginyeria i diverses més. Vegeu C. Puig (2002), p. 152.

BIBLIOGRAFIA

AL-KHWARIZMI (1986), The Algebra of Mohammed ben Musa, Rosen, F. (ed. i trad.), (1era ed. Londres, 1831), Hildesheim, Zrich, Nova York, Georg Olms Verlag.

BASHMAKOVA-SMIRNOVA (2000), The Beginnings and Evolution of Algebra, traduït del rus per Abe Shenitzer, The Mathematical Association of America, United States of America.

BOMBELLI, R. (1929), Algebra, edició de Bortolotti, Milano, Feltrinelli.

CATALA, M. A. (1981), "El nacimiento del álgebra", dins de Historia de la ciencia árabe, J. Vernet (ed.), Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid, pp. 23-37.

CAVEING, M. (1994), Essai sur le savoir Mathématique. Dans la Mésopotamie et l'Égypte anciennes, Lille, Presses Universitaires de Lille.

CARDANO, G. (1968), The Great Art or the Rules of Algebra. Witmer, T. Richard (ed., trans.), Cambridge, Mass., & London: M. I. I. Press.

DESCARTES, R. (1954), The geometry of René Descartes. D. E. Smith & M. L. Latham (ed., trans.), Nueva York, Dover.

EUCLIDES, (1956), The Elements, edició anglesa de T. L. Heath, vol. 1, Nova York, Dover.

EULER, L. (2000), Introductio in Analysin Infinitorum, Arantegui, J. L. i Durán, A. J. Trad i anot, Sevilla, SAEM "Thales".

FRANCI, R.-TOTI RIGATELLI, L. (1985), "Towards a history of algebra from Leonardo of Pisa to Luca Pacioli", Janus 72, pp. 17-82.

GILAIN, C. (1991), "Sur l'histoire du théorème fondamental de l'algèbre: théorie des équations et calcul integral", Archive for History of Exact Sciences (AHES) 42, pp. 91-136.

HOYRUP, J. (2002), Lengths, Widths, Surfaces. A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin, Nova York, Springer-Verlag.

KLINE, M., (1972), Mathematical Thought from Ancient to Modern Time, Nova York, Oxford University Press.

LAGRANGE, J. L. (1867-1892), Réflexions sur la résolution algébrique des équations, a Oeuvres, vol. 3., París, pp. 205-421.

MAHONEY, M. S. (1980), "The beginnings of algebraical thought in the Seventeenth century", Descartes'philosophy, mathematics and physics, Gaukroger, S., ed., Totowa/Brighton, Barnes and Noble/Harvester, pp. 141- 156.

MASSA ESTEVE, M. R. (2001), "Las relaciones entre el álgebra y la geometria en el siglo XVII", LLULL, vol. 24, pp. 705-725.

PARSHALL, K. H. (1988), "The art of Algebra from Al-Khwarizmi to Viète: a study in the natural selection of ideas", History of Science, 26, pp. 129-164.

PLA, J., (2002) The fundamental theorem of algebra before Carl Friedrich Gauss. Publicacions matemàtiques, vol. 36, pp. 879-911.

PUIG-PLA, C. (2002), "Sobre el significat del concepte matemàtiques : matemàtiques pures i mixtes en els segles XVIII i XIX", Actes de la VI Trobada d'Història de la Ciència i de la Tècnica, Barcelona, pp. 151-169.

SIGLER, L. E. (2002), Fibonacci's Liber Abaci, A translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation, Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, Springer.

SMITH, D. E., (1959), A source book in Mathematics, Dover, Nova York, pp. 292-310.

STRUIK, D. (ed.) (1969), A Source Book in Mathematics, 1200-1800, Cambridge, Mas:

Harvard University Press.

TOTI RIGATELLI, L. (1994), “The theory of equations from Cardano to Galois, 1540-1830”, a Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences, vol. 1, Grattan-Guinnes, I.,(ed.), Londres i Nova York, Routledge, pp. 713-721.

VIÈTE, F. (1983), The Analytic Art. T.R. Witmer (tr.), Kent, Ohio, Kent State University Press.

VAN DER WAERDEN, B. L. (1980), A History of Algebra. From Al-khwarizmi to Emmy Noether, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo.